466. 直線叢論 II

武田楠雄（旅順中）

上述ノ如ク採ラレタ標構ヲ基本標構 R_0 ト名付ケル。尚基本方程式（I）ノ積分條件ハートシテ容易ニ

$$E_{ji}=E_{ij},\quad F_{ji}=F_{ij},\quad G_{ji}=G_{ij},$$
$$H_{ji}=H_{ij}\quad (i,j=1,2)$$

ヲ得ル。

4°　今2ツノ parameter u^1, u^2 ヲ

$$u^1 = u^1(v^1, v^2), \quad u^2 = u^2(v^1, v^2)$$

ニヨツテ変換シ，且ツ

$$\alpha_i^j = \frac{\partial u^i}{\partial u^j}$$

トオケバ

$$H'_{ij} = \left(\left(p' \quad \frac{\partial p'_i}{\partial v^j}\right)\right) = H_{\sigma\tau}\alpha_i^\sigma \alpha_1^\tau$$

トナリ，コノ変換ニヨツテ p, p_5 ノ座標ハ変ラズ，p_1, p_2 ハ夫々（$0, \alpha_1^1, \alpha_1^2, 0, 0, 0$），（$0, \alpha_2^1, \alpha_2^2, 0, 0, 0$）ニ移サレル。故ニ平面 $pp_1p_2p_5$ ハ変ラズ、従ツテ p_3, p_4 モ亦変ラナイ。

次ニ因数 $\lambda(u^1, u^2)$ ヲ p ノ座標ニカケレバ

$$H'_{ij} = (\lambda)^2 H_{ij}$$

$$\frac{1}{2}H'^{\sigma\tau}\frac{\bar{\partial} p'_\sigma}{\partial u^\tau} = \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{2}H^{\sigma\tau}\frac{\bar{\partial} p_\sigma}{\partial u^\tau} + \lambda^\sigma p_\sigma + \frac{1}{2\lambda}H^{\sigma\tau}\frac{\bar{\partial}(\lambda\lambda_\sigma)}{\partial u^\tau}p\right\}$$

$$p' = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\left\{p + \frac{1}{2}\lambda_\sigma\lambda^\sigma - \frac{1}{2\lambda}H^{\sigma\tau}\frac{\bar{\partial}(\lambda\lambda_\sigma)}{\partial u^\tau}\right\}$$

トナリ、p, p_1, p_2, p_5 ハ夫々（$\lambda, 0, 0, 0, 0, 0$），（$\lambda\lambda_1, \lambda, 0, 0, 0, 0$），（$\lambda\lambda_2, 0, \lambda, 0, 0, 0$），（$\frac{1}{2\lambda}\lambda_\sigma\lambda^\sigma, \frac{\lambda^1}{\lambda}, \frac{\lambda^2}{\lambda}, 0, 0, \frac{1}{\lambda}$）ニ移サレ、$p_3, p_4$ ハ変ラナイ。

以上ニヨリ

$$G'_{ij} = \lambda G_{ij}, \quad F'_{ij} = \lambda F_{ij},$$

$$M'_i = \frac{1}{\lambda}(M_i - G_i^\rho \lambda_\rho), \quad N'_i = \frac{1}{\lambda}(N_i - F_i^\rho \lambda_\rho)$$

$$L'_\sigma du^\sigma = L_\sigma du^\sigma$$

ヲ得ル。マタ

$$\Lambda = F^\sigma_\tau G^\tau_\sigma$$

トオケバ

$$\Lambda' = \frac{1}{(\lambda)^2}\Lambda$$

トナル。

5°. $p' = \lambda p$ ナル変換ニヨリ

$$\Gamma^{j\,\prime}_{i\,l} = \Gamma^j_{i\,l} + (H^j_l \lambda_i + H^j_i \lambda_l - H_{il}\lambda^j)$$

$$\left(\frac{\partial F_{ij}}{\partial u^l}\right)' = \lambda\left\{\frac{\partial F_{ij}}{\partial u^l} + (H_{il}F^\sigma_j \lambda_\sigma + H_{jl}F^\sigma_i \lambda_\sigma) - (F_{ij}\lambda_l + F_{jl}\lambda_i + F_{il}\lambda_j)\right\}$$

$$F'^{\sigma}_{\sigma l} = \frac{1}{3}\left\{\frac{\partial F^{\sigma\prime}_l}{\partial u^\sigma} + \Gamma^{\sigma\prime}_{\sigma\rho} F^{\rho\prime}_l - \Gamma^{\rho\prime}_{\sigma\,l} F^{\sigma\prime}_\rho + F^{\sigma\prime}_l L_\sigma - 2N'_l\right\}$$

トナル故ニ

$$F^{\sigma\prime}_{\sigma l} = \frac{1}{\lambda}\left(F^\sigma_{\sigma l} + \frac{5}{3}(N_l - \lambda N'_l)\right)$$

トナル。今

$$\mathbb{F}^\sigma_{\sigma l} = F^\sigma_{\sigma l} + \frac{5}{3}N_l \qquad (i = 1, 2)$$

トオケバ

$$\mathbb{F}^{\sigma\prime}_{\sigma l} = \frac{1}{\lambda}\mathbb{F}^\sigma_{\sigma l}$$

トナル。同様ニ

$$\mathfrak{G}^{\sigma}_{\alpha l} = G^{\sigma}_{\alpha l} + \frac{5}{3} M_l \quad (i=1,2)$$

トオケバ

$$\mathfrak{G}^{\alpha'}_{\alpha l} = \frac{1}{\lambda} \mathfrak{G}^{\sigma}_{\alpha l}$$

ヲ得ル。

漸近線媒介座標

6°　$u^1 = const.$ 及ビ $u^2 = const.$ ヲ線叢Kノ像V上ノ漸近曲線ノ方向ニトルトキハ

$$H_{11} = H_{22} = 0$$

デアリ、p_1, p_2 ハ Θ_4 上ニアリ、pp_1, pp_2 ハ Θ_4 ノ母線トナル。今

$$\log H_{12} = \theta$$

トオケバ

$$\Gamma_{111} = \Gamma_{122} = \Gamma_{211} = \Gamma_{222} = 0$$

$$\Gamma_{1}{}^{1}{}_{1} = \frac{\Gamma_{121}}{H_{12}} = \theta_u, \quad \Gamma_{22}{}^{2} = \frac{\Gamma_{212}}{H_{12}} = \theta_v$$

トナル。又 (IX) ハ

$$F_{12} = 0, \quad G_{12} = 0$$

トナリ，又

$$\frac{\partial w_1{}^3}{\partial u^2} = \frac{\partial w_1{}^4}{\partial u^2} = \frac{\partial w_2^3}{\partial u^1} = \frac{\partial w_2{}^4}{\partial u^1} = 0$$

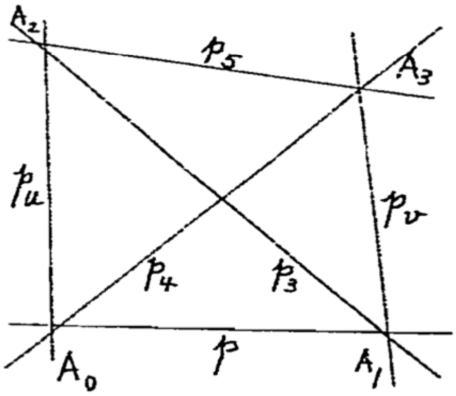
デアル。

以下、便宜上 u^1, u^2 ノ代リニ夫々 u, v ヲ以テ示スコトニスレバ基本方程式(I)ハ

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}
dp = du\, p_u + dv\, p_v, \\
dp_u = (E_{11}\, du + E_{12}\, dv)\, p + \theta_u\, du\, p_u + F_{11}\, du\, p_3 \\
\qquad + G_{11}\, du\, p_4 + H_{12}\, dv\, p_5, \\
dp_v = (E_{21}\, du + E_{22}\, dv)\, p + \theta_v\, dv\, p_v + F_{22}\, dv\, p_3 \\
\qquad + G_{22}\, dv\, p_4 + H_{12}\, du\, p_5, \\
dp_3 = (M_1\, du + M_2\, dv)\, p + G^1_2\, dv\, p_u + G^2_1\, du\, p_v \\
\qquad + (L_1\, du + L_2\, dv)\, p_3, \\
dp_4 = (N_1\, du + N_2\, dv)\, p + F_2^1\, dv\, p_u + F_1^2\, du\, p_v \\
\qquad - (L_1\, du + L_2\, dv)\, p_4, \\
dp_5 = (E_1^1\, du + E_2^1\, dv)\, p_u + (E_1^2\, du + E_2^2\, dv)\, p_v \\
\qquad - (N_1\, du + N_2\, dv)\, p_3 - (M_1\, du + M_2\, dv)\, p_4.
\end{cases}
$$

トナル。

7°. 今4直線 p, p_u, p_v, p_5 ノ交点ヲ圖ノ如ク A_0, A_1, A_2, A_3 トスレバ, 元來 p_3 ト p_4 トハ交ハラヌカラ p, p_u, p_v, p_5 ノウチノ1ツハ A_0A_3 ト一致シ, 他ハ A_1A_2 ト一致セネバナラヌ。今 p_3 ヲ以テ A_1A_2 ニ一致スルモノトスル。



カクノ如キ標構ヲ漸近線媒介座標 R_a ト名付ケル。

5次元空ノ一点 p ヲ。

$$
p = \gamma^0 p + \gamma^1 p_u + \gamma^2 p_v + \gamma^3 p_3 + \gamma^4 p_4 + \gamma^5 p_5
$$

トカケバ Θ_4 ノ方程式ハ

$$\gamma^0\gamma^5+\gamma^3\gamma^4=H_{12}\gamma^1\gamma^2$$

デアルカラ直線 p ノ Plücker 座標 p^{ij} ト上ノ γ^i トノ間ニハ

$$p^{01}=\gamma^0,\quad p^{02}=\gamma^1,\quad p^{03}=\gamma^4,$$
$$p^{12}=\gamma^3,\quad p^{13}=H_{12}\gamma^2,\quad p^{23}=\gamma^5$$

ナル関係ガアルト考ヘルコトガ出来ル。

扨テ R_a ニ於テハ parameter ノ変換ニヨツテハ座標ハ変ラズ。$p'=\lambda p$ ニヨツテハ R_5 ニ於テ p, p_u, p_v, p_5 ハ夫々

$$(1,0,0,0,0,0),\ (\lambda_1,1,0,0,0,0),\ (\lambda_2,0,1,0,0,0),$$
$$(\lambda_1\lambda_2,\lambda_2,\lambda_1,0,0,H_{12})$$

トナルカラ A_0, A_1 ハ変ラズ，A_2, A_3 ハ夫々

$$(0,\lambda_1,1,0),\ (-\lambda_2,0,0,H_{12})$$

ニ移ル。

又明カナル如ク標構 R_a ニ於テハ平面 pp_4, pp_3 ハ夫々焦点 A_0, A_1 ニ於ケル S_0, S_1 ヘノ切平面デアル。

8°. u ノミガ変化スルトキハ p ハ展開曲面ヲ画キ A_0 ハコノ展開曲面ノ反帰曲線 D_0 ヲ画ク。v ニツイテモ同様デアル。故ニ H（H_{ij} デ作ル行列式）ガ零デナイトキニ於テハ明カニ線叢 K ハ ∞^2 ノ展開曲面ヲ持チ，マタ2ツノコトナル焦曲面 S_0, S_1 ヲモツ。而シテ p ハ A_0 ニ於テ S_0（例ヘバ）ニ切シ A_1 ニ於テ S_1 ニ切スル。

S_1 上ニ於テ A_1 ヲ通ル任意ノ曲線 Γ ノ切線ヲ

$q = \alpha p + \beta p_3 + \gamma p_v$ トカケバ

$$\gamma = 0$$

$$(2) \quad \alpha\, du + \beta G_2^1\, dv = 0$$

トナル。モシ特ニ Γ ガ S_1 上ノ漸近曲線ナルトキハ更ニ

$$(3) \quad \alpha\, dv + \beta G_1^2\, dv = 0$$

トナル。(2), (3) ヨリ du, dv ヲ消去スレバ $(\alpha)^2 = G_1^2 G_2^1 (\beta)^3$ トナリ、モシ $G_{11} G_{22} \neq 0$ ナルトキハ S_1 上ニハアル漸近曲線ニ関シテ互ニ共軛ナ2ツノ曲線アルコトヲ知ル。

マタ (2), (3) ヨリ α, β ヲ消去スレバ

$$G_{11}\, du^2 - G_{22}\, dv^2 = 0$$

トナル。コレハ S_1 上ノ漸近曲線ノ方向ヲ示ス。

焦曲面 S_p ニツイテモ同様デアル。依ツテ

<u>二ツノ異ナル焦曲面ヲ有スル線叢ガ W 線叢ナルタメノ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ</u>

$$F_{11} : F_{22} = G_{11} : G_{22}$$

<u>ナル事デアル。</u>